*Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.*
**ANÁLISIS MATEMÁTICO III**

**APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA**
*D. Prelat* - 2020

## § 8. TRANSFORMACIONES CONFORMES.

Este es un capítulo sobre geometría plana, esencialmente, pues estudiaremos algunas figuras geométricas, algunas transformaciones del plano y el efecto que estas transformaciones tienen sobre esas figuras. Desde ya que no tiene ningún sentido presentar aquí una fundamentación de la geometría, arte y ciencia que tiene varios milenios de antigüedad. Solamente precisaremos un poco los términos que vamos a utilizar. Las figuras que nos interesan estudiar (por ahora) son básicamente las rectas, las circunferencias, los sectores angulares, la red cartesiana ( = conjunto de todas las rectas paralelas a los ejes coordenados, es decir: las curvas donde una de las coordenadas cartesianas es constante) y la red polar (conjunto de todas las semirrectas con origen en 0 y todas las circunferencias con centro en 0, es decir: las curvas donde una de las coordenadas polares es constante). También pueden aparecer algunas cónicas y algún que otro polígono.

En cuanto a las transformaciones, en general se denomina *transformación del plano* a cualquier función $f : D \longrightarrow \Re^2$ donde $D \subseteq \Re^2$, lo que no es otra cosa que un cambio de nombre pero que tiene su explicación. El origen de esta denominación tal vez deba buscarse en las *transformaciones de coordenadas*, pero en un sentido geométrico más general, y se debe a que estas funciones *transforman* conjuntos del plano en otros conjuntos del plano, como las traslaciones, las rotaciones, las homotecias, etc. Para visualizar esto, y representando los puntos del plano mediante números complejos, se suele visualizar el dominio de la función en un plano, "el plano *z*", y el codominio en otro plano, el "plano *w*". En el capítulo anterior hemos utilizado esta representación gráfica donde los dominios y codominios aparecieron con los nombres "universo *z*" y "universo *w*". Lo que hay que tener presente es que el gráfico de una función $f : \Re^2 \longrightarrow \Re^2$ (o $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$) es un subconjunto de $\Re^4$, lo que motivó históricamente la búsqueda de otras formas de visualizar estas funciones. En general una función cualquiera $f : D \longrightarrow \Re^2$ puede ser muy poco interesante y solamente vamos a estudiar algunas que tienen propiedades importantes. En Álgebra II se estudian las transformaciones lineales $f : \Re^2 \longrightarrow \Re^2$ (entre otras). Estas transformaciones lineales, cuando son biyectivas (isomorfismos lineales) transforman rectas en rectas, por ejemplo. Más precisamente: dada una recta $r \subset \Re^2$, su transformada por *f*, que por definición es el conjunto $f(r) = \{f(p) : p \in r\}$, es también una recta. Desde ya que esto no ocurre con cualquier función $f:\Re^2 \longrightarrow \Re^2$, que puede transformar una recta en una curva cualquiera o en un punto (o en conjuntos mucho más exóticos).

Este es el momento de ir precisando un poco más la cuestión de las transformaciones lineales $f:\Re^2 \longrightarrow \Re^2$. El plano puede verse como un espacio vectorial real de dimensión 2, es decir: $(\Re^2,+,\Re,.)$, o bien como un espacio vectorial complejo de dimensión 1, es decir: $(\mathbb{C},+,\mathbb{C},.)$. Esta diferencia debe tenerse muy presente cuando se habla de transformación lineal. Como vamos a unificar la notación del plano escribiendo $\mathbb{C}$ en lugar de $\Re^2$, conviene dejar bien clara esta diferencia:

($a$) Una función $f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\Re$ - lineal sii:

($a$.1) para todos $z$ y $w$ en $\mathbb{C}$: $f(z+w) = f(z) + f(w)$

($a$.2) para todo $z$ en $\mathbb{C}$ y todo $\lambda \in \Re$: $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ $\Leftarrow$ ¡ojo!

($b$) Una función $f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ - lineal sii:

($b$.1) para todos $z$ y $w$ en $\mathbb{C}$: $f(z+w) = f(z) + f(w)$

($b$.2) para todo $z$ en $\mathbb{C}$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$: $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ $\Leftarrow$ ¡ojo!

Es evidente que toda transformación $\mathbb{C}$ - lineal es $\Re$ - lineal, pues los escalares reales son también escalares complejos. Pero la recíproca es falsa, como ilustra un ejemplo famoso: la conjugación, es decir la función $\tau:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tau(z) = \bar{z}$. Sabemos que para todo par de complejos $z$ y $w$: $\tau(z+w) = \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} = \tau(z) + \tau(w)$. Pero $\tau$ verifica la propiedad ($a$.2) y <u>no</u> verifica la propiedad ($b$.2), pues para cada $z$ en $\mathbb{C} - \{0\}$ y cada $\lambda \in \mathbb{C} - \Re : \tau(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\bar{z} = \bar{\lambda}\,\tau(z) \neq \lambda\tau(z)$. Desde ya que hay otros ejemplos, pero este es especialmente relevante por la importancia operativa de la conjugación. Con la notación que utilizábamos en álgebra lineal, escribiríamos

$$\tau\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde la matriz $A$ verifica $A^2 = I$, como toda matriz de una simetría (o reflexión). La idea geométrica subyacente es clara y sencilla de entender (o recordar), así como la relación entre las propiedades $A^2 = I$ y $\forall z \in \mathbb{C} : \bar{\bar{z}} = z$.

Ahora, desde Álgebra II sabemos cómo son las funciones $f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ - lineales. En realidad son muy pocas y es muy fácil caracterizarlas: si para todo $z$ en $\mathbb{C}$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$

se verifica $f(\lambda z) = \lambda f(z)$, en particular para $z = 1$ resulta que $f(\lambda) = \lambda f(1)$. Indiquemos $w_0 = f(1)$. Entonces, para todo $z$ en $\mathbb{C}$ :

$$f(z) = f(z.1) \overset{(b.1)}{=} zf(1) = w_0 z \qquad (8.1)$$

Por otra parte, si $f$ verifica (8.1), también verifica ($b$1), como puede verse inmediatamente haciendo la cuentita.

<u>Es decir: las únicas transformaciones $\mathbb{C}$- lineales $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ son las funciones de la forma $f(z) = w_0 z$ para algún complejo $w_0$</u> (que resulta ser $f(1)$, obviamente).

***Observación* 8.1**: Desde luego, lo mismo ocurre en el campo real: las únicas transformaciones $\Re$ - lineales $f:\Re\longrightarrow\Re$ son las funciones de la forma $f(x) = cx$ para alguna constante $c$ (que resulta ser $f(1)$), por la misma obvia razón que para el caso complejo.

Veamos un poco qué hacen y cómo se comportan estas funciones $\mathbb{C}$- lineales. Recordemos que son $\Re$ - lineales, como hemos visto más arriba. Elijamos un complejo no nulo $w_0$ (el caso nulo no resulta muy interesante que digamos) y consideremos la función $\mathbb{C}$- lineal asociada $f(z) = w_0 z$. Por ser $w_0 \neq 0$, podemos expresarlo en coordenadas polares, $w_0 = \rho e^{i\alpha}$ y entonces, para cada complejo no nulo $z = re^{i\theta}$ resulta

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = w_0 z = \rho e^{i\alpha} re^{i\theta} = \rho r e^{i(\alpha+\theta)} \qquad (8.2)$$

O bien, en cartesianas:

$$f(x+iy) = \rho\cos(\alpha)x - \rho sen(\alpha)y + i[\rho sen(\alpha)x + \rho\cos(\alpha)y] \qquad (8.3)$$

Esta sencilla fórmula permite describir geométricamente todas las transformaciones $\mathbb{C}$- lineales $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ (no nulas): cada una de estas funciones $f$ es una composición $f = h_\rho \circ R_\alpha$, donde $R_\alpha:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ es la rotación en ángulo $\alpha$ en torno del origen en sentido antihorario, es decir: $R_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$, y $h_\rho:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ es la homotecia con centro en el origen y razón $\rho > 0$, es decir: $h_\rho(z) = \rho z$. Para recordar nuestro paso por Álgebra I y II, escribimos estas transformaciones con la notación del álgebra lineal:

$$R_\alpha\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \cos(\alpha)x - sen(\alpha)y \\ sen(\alpha)x+\cos(\alpha)y \end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}^{Q_\alpha}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

$$h_\rho\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \rho x \\ \rho y \end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}}^{\rho I}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

De esta manera se puede reconocer y recordar las ideas geométricas involucradas. Ahora, componiendo

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \rho\cos(\alpha)x - \rho sen(\alpha)y \\ \rho sen(\alpha)x+\rho\cos(\alpha)y \end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}}^{\rho I}\overbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}^{Q_\alpha}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

Insistimos en que (8.6) no es una transformación $\Re$-lineal $L:\Re^2 \longrightarrow \Re^2$ cualquiera, pues éstas son de la forma $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x \end{bmatrix}$, donde $A\in\Re^{2\times 2}$ puede ser *cualquier* matriz real $2\times 2$. Pero la matriz de (8.6), es decir

$$\begin{bmatrix} \rho\cos(\alpha) & -\rho sen(\alpha) \\ \rho sen(\alpha) & \rho\cos(\alpha) \end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}}^{\rho I}\overbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}^{Q_\alpha} \tag{8.7}$$

<u>no es</u> *cualquier* matriz real 2 x 2. Por ejemplo, no puede ser una matriz triangular. Además, y más importante para nosotros en este momento, la matriz (8.7) aplicada a una figura del plano la hace girar en torno del origen en un ángulo $\alpha$ en sentido antihorario (la rotación $R_\alpha$) y luego la dilata (si $\rho>1$) o la contrae (si $0<\rho<1$) desde el origen, sin modificar su forma (la homotecia $h_\rho$ ). Hemos hecho una descripción excesivamente coloquial de la transformación (8.7), pero supongo que el siguiente dibujito deja muy clara la cuestión. En el "plano *w*" hemos indicado primero la rotación $R_\alpha$ de la banderita dibujada en el "plano *z*" y luego la homotecia $h_\rho$, en este caso de razón $\rho>1$. Obsérvese que podríamos haber puesto estas dos transformaciones en orden inverso, pues $h_\rho \circ R_\alpha = R_\alpha \circ h_\rho$ . Pero esto es una particularidad de las homotecias (su matriz $\rho I$ conmuta con cualquier matriz), pues las transformaciones lineales no conmutan en general.

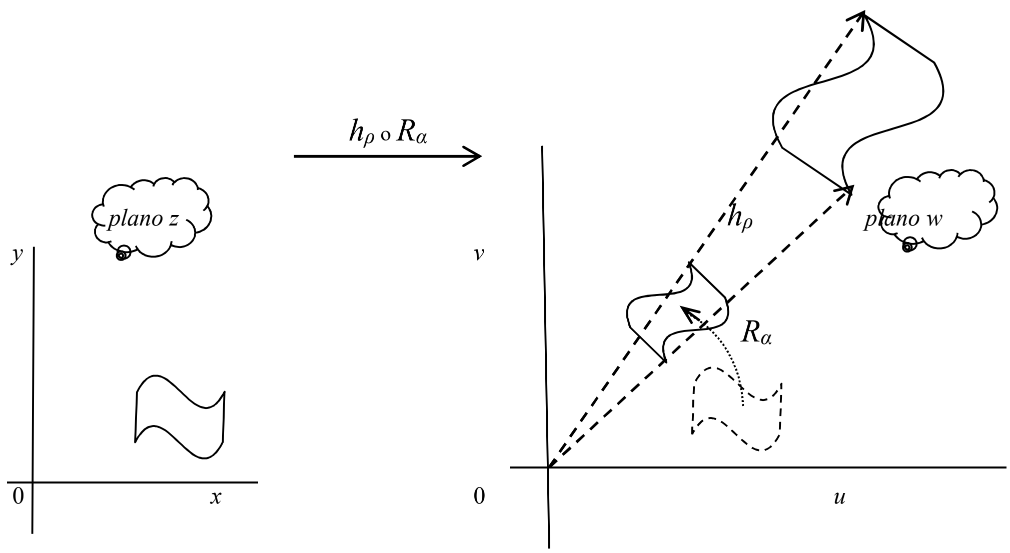



**Fig. 1**
Transformación $\mathbb{C}$-lineal

Como sabemos desde Salita Naranja, una propiedad muy importante de las rotaciones es que conservan las distancias y los ángulos, por la sencilla razón de que conserva el producto euclídeo ( = producto interno canónico). Más precisamente, sea $<.,.>$ el producto euclídeo en el plano, es decir $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$; con la notación compleja tenemos la expresión, para cada par de complejos $z = x+iy$, $w = a+ib$:

$$< z\,,\, w > = \langle x+iy, a+ib \rangle = xa + yb = \mathrm{Re}[(x-iy)(a+ib)] = \mathrm{Re}(\bar{z}w) = \tfrac{1}{2}(z\overline{w} + \bar{z}w) \quad (8.8)$$

Entonces

$$\langle R_\alpha(z), R_\alpha(w) \rangle = \langle e^{i\alpha} z, e^{i\alpha} w \rangle = \tfrac{1}{2}[e^{i\alpha} z e^{-i\alpha} \overline{w} + e^{-i\alpha} \bar{z} e^{i\alpha} w] = \tfrac{1}{2}[z\overline{w} + \bar{z}w] = < z, w > \quad (8.9)$$

para todo par de complejos $z$ y $w$. Esto es lo que significa que $R_\alpha$ conserva *el producto euclídeo*, y lo que hemos comprobado, utilizando la notación compleja, es una propiedad que usted conoce para los espacios $\Re^n$ y para matrices ortogonales en general: que estas matrices conservan el producto interno canónico en estos espacios.

Ahora, como para todo par de complejos $z$ y $w$ tenemos que $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{< z, z >}$ , $d(z,w) = |w-z| = \sqrt{< w-z, w-z >}$ (distancia entre $z$ y $w$), y (si $z$ y $w$ son no nulos) el ángulo entre ellos es $angulo(z,w) = ar\cos\dfrac{< z, w >}{|z||w|}$, resulta que

($i$) Para todo complejo $z$: $|R_\alpha(z)| = |e^{i\alpha}z| = |e^{i\alpha}||z| = |z|$. (8.10)($i$)

($ii$) Para todo par de complejos $z$ y $w$:

$$d(R_\alpha(z), R_\alpha(w)) = |R_\alpha(w) - R_\alpha(z)| \overset{linealidad}{=} |R_\alpha(w-z)| \overset{(i)}{=} |w-z| = d(z,w) \qquad (8.10)(ii)$$

($ii$) Si $z \neq 0 \neq w$:

$$\begin{aligned} &ángulo(R_\alpha(z), R_\alpha(w)) = ar\cos\frac{< R_\alpha(z), R_\alpha(w) >}{|R_\alpha(z)||R_\alpha(w)|} = \\ &= ar\cos\frac{< z, w >}{|z||w|} = ángulo(z,w) \end{aligned} \qquad (8.10)(iii)$$

La propiedad ($ii$) se enuncia diciendo que "$R_\alpha$ conserva las distancias" y ($iii$) se enuncia de la misma manera: "$R_\alpha$ conserva los ángulos entre vectores". Por lo tanto, como era de esperar intuitivamente, las rotaciones conservan formas y tamaños. Lo que no es tan evidente de probar es que también preservan la *orientación*. No tenemos tiempo ni espacio para tratar aquí este tema como corresponde (ver Comentario 8. 1 al final). Solamente mencionaremos que las rotaciones conservan el signo de los ángulos, y eso no se deduce de la cuenta anterior. El problema con la cuenta (8.10) ($iii$) es que la fórmula $\frac{< z, w >}{|z||w|}$ es simétrica respecto del intercambio de $z$ y $w$, es decir $\frac{< z, w >}{|z||w|} = \frac{< w, z >}{|w||z|}$ , y por lo tanto no detecta el signo del *ángulo*($z,w$). Obviamente, esto está relacionado con que $\frac{< z, w >}{|z||w|}$ es el coseno del ángulo entre estos vectores, y el coseno es una función par. Ahora, si consideramos los ángulos orientados, con signo, tenemos necesariamente que *ángulo*($w,z$) = - *ángulo*($z,w$) . Se puede probar que el hecho de que las rotaciones conserven el signo de los ángulos está relacionado con el signo positivo del determinante de sus matrices respecto de la base canónica, es decir, de las matrices $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$. Comparemos con la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ de la conjugación compleja, por ejemplo. Su determinante es negativo. Y no es casualidad que sea la matriz de una reflexión, no de una rotación. Esta matriz transforma los vectores canónicos $e_1$ y $e_2$ (1 e $i$, en notación compleja) en los vectores $e_1$ y $-e_2$, (1 y $-i$, en notación compleja); el ángulo entre los primeros es $\frac{\pi}{2}$, mientras que el ángulo entre los dos segundos es $-\frac{\pi}{2}$.

Veamos ahora qué pasa con las homotecias $h_\rho$ (recordemos que $\rho$ es real y positivo). Las cuentas son mucho más cortitas, pues para cada par de complejos $z$ y $w$:

$$< h_\rho(z), h_\rho(w) > = < \rho z, \rho w > = \rho^2 < z, w > \tag{8.11}$$

Resulta entonces que las homotecias no conservan las distancias, pues para todo par de complejos $z$ y $w$:

$$(i)\ \left|h_\rho(z)\right| = \left|\rho z\right| = \rho\left|z\right| \qquad (8.12)(i)$$

$$(ii)\ d(h_\rho(z), h_\rho(w)) = \left|h_\rho(w) - h_\rho(z)\right| = \left|\rho(w - z)\right| = \rho\left|w - z\right| = \rho d(z, w) \qquad (8.12)(ii)$$

Ahora, en cuanto a los ángulos:

(*iii*)

$$\begin{aligned} \textit{ángulo}(h_\rho(z), h_\rho(w)) &= ar\cos\frac{< h_\rho(z), h_\rho(w) >}{\left|h_\rho(z)\right|\left|h_\rho(w)\right|} = \\ &= ar\cos\frac{\rho^2 < z, w >}{\rho^2\left|z\right|\left|w\right|} = ar\cos\frac{< z, w >}{\left|z\right|\left|w\right|} = \textit{ángulo}(z, w) \end{aligned} \qquad (8.12)(iii)$$

En las identidades (*i*) y (*ii*) se ve claramente que la homotecia $h_\rho$ no conserva las distancias. De hecho, las multiplica a todas por un mismo factor constante, $\rho$. Transforma cada segmento de recta de longitud $l$ en un segmento de longitud $\rho l$. Pero en cuanto a los ángulos, ¡*albricias*!, se conservan. Esto se ve parcialmente en (8.12)(*iii*), pues queda el tema de los signos. Como mencionamos previamente y sin ningún tipo de prueba, lamentablemente, la conservación de los signos de los ángulos está relacionada con el determinante de la matriz de $h_\rho$ respecto de la base canónica: $\rho I = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$. El determinante es $\rho^2 > 0$, lo que nos garantiza (aunque no lo hayamos probado) que $h_\rho$ conserva los signos de los ángulos.

Las homotecias son nuestro primer y más sencillo ejemplo de *transformación conforme*. Así como las *isometrías* son las transformaciones que conservan las distancias, las *transformaciones conformes* son las que conservan los ángulos (incluyendo el signo de los mismos). Es evidente que la composición de transformaciones conformes es, también, conforme (meditarlo). Por lo tanto, otro ejemplo que ya tenemos de transformaciones conformes son las transformaciones $\mathbb{C}$-lineales (no nulas) $f = h_\rho \circ R_\alpha$

(recordemos que son de la forma $f(z) = w_0 z$), pues las rotaciones también son conformes.

Pero el concepto de transformación conforme no se restringe a transformaciones lineales. Veamos una generalización violenta y alevosa de este concepto con el caso que nos interesa en este curso. Para eso, recordamos la siguiente proposición, que enunciamos y demostramos en el Capítulo V (Proposición 5.3): Sean

(a) $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$,

(b) $\gamma : I \longrightarrow D$ una función derivable en un intervalo abierto $I \subseteq \Re$,

Entonces, la función $\sigma = f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en el intervalo abierto $I$ y además, para cada $t \in I$ se verifica: $\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$

Para que aparezca el sentido geométrico, debemos suponer que $f$ es holomorfa en el abierto $D$ y que su derivada no es nula en ningún punto de $D$ (esto implica que $f$ es inyectiva en un entorno de cada punto de $D$, como hemos visto en el capítulo anterior), y que $\gamma$ es una parametrización regular de un arco de curva $C \subset D$, es decir: $C = \{\gamma(t) : t \in I\}$ es la imagen de $\gamma$, $\gamma$ es inyectiva y su derivada no se anula en ningún punto del intervalo $I$ (ya hemos asumido que $\gamma$ es derivable). Entones, $\sigma = f \circ \gamma$ es también una parametrización regular de la curva $\Gamma = \{f(z) : z \in C\} = \left\{ \overbrace{f(\gamma(t))}^{\sigma(t)} : t \in I \right\}$,

imagen de $C$ por la "transformación" $f$ (para ser rigurosos, es regular en un entorno de cada $f(\gamma(t))$, pues $f$ es inyectiva en un entorno de cada punto $z_0 \in D$; pero esto es suficiente para lo que necesitamos). Para cada punto $z_0 = \gamma(t_0) \in C$, un vector tangente a $C$ en dicho punto es $T = \gamma'(t_0)$ (consideramos a este número complejo $T$ como un vector que indica dirección tangente a la curva $C$ y el sentido de recorrido de la misma: ver *Aclaración* 8.1 abajo), y un vector tangente a $\Gamma$ en el correspondiente punto $f(z_0) = f(\gamma(t_0)) = \sigma(t_0) \in \Gamma$ es, por la proposición anterior,

$$S = \sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)T \tag{8.13}$$

(lo mismo: consideramos al número complejo $S$ como un vector que indica la dirección tangente a $\Gamma$ y su sentido de recorrido). Como $T \neq 0$ y $f'(z_0) \neq 0$, entonces también $S \neq 0$ y podemos escribir $f'(z_0) = \rho e^{i\alpha}$ por un lado y normalizar los tangentes por el otro: $\breve{T} = \frac{1}{|T|}T$, $\breve{S} = \frac{1}{|S|}S$. Reemplazando en (8.13) resulta (hacer las cuentitas)

$$\breve{S} = e^{i\alpha}\breve{T} \tag{8.14}$$

Esto significa que el versor $\breve{S}$ tangente a la curva transformada Γ en un punto $f(z_0)$ se obtiene a partir del versor tangente $\breve{T}$ a la curva $C$ en $z_0$, mediante una rotación en ángulo $\alpha$, que es el argumento de $f'(z_0)$.

***Aclaración* 8.1**: Estamos considerando curvas orientadas, o sea: sus parametrizaciones regulares inducen un sentido de recorrido de las mismas. Por lo tanto, cada versor tangente $\breve{T} = \frac{1}{|\gamma'(t_0)|}\gamma'(t_0)$ informa la dirección de la recta tangente a la curva y además sobre el sentido de recorrido (en el punto $\gamma(t_0)$ ).

Ahora, supongamos que por el punto $z_0 \in D$ pasan dos curvas, $C_1$ y $C_2$. Sus transformadas por $f$ son dos curvas $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ que pasan por el mismo punto $f(z_0)$. Si indicamos con $\breve{T}_1$ y $\breve{T}_2$ a los correspondientes versores tangentes a $C_1$ y $C_2$ en $z_0$, entonces, de (8.14) se deduce que los versores tangentes a $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ en $f(z_0)$ son, respectivamente, $\breve{S}_1 = e^{i\alpha}\breve{T}_1$ y $\breve{S}_1 = e^{i\alpha}\breve{T}_1$ , donde $\alpha$ es el argumento de $f'(z_0)$. Pero entonces, los ángulos $\acute{a}ngulo(\breve{T}_1,\breve{T}_2)$ y $\acute{a}ngulo(\breve{S}_1,\breve{S}_2)$ son iguales (incluyendo signo).

<u>Esto significa que $f$ es una transformación conforme</u>, en el sentido de que transforma pares de curvas orientadas que se cortan en un punto de su dominio formando un ángulo dado, en pares de curvas que se cortan formando el mismo ángulo. Está claro que cuando nos referimos al ángulo que forman dos curvas regulares que se cortan en un punto, se trata del ángulo que forman sus versores tangentes en dicho punto. (Ver aclaración 8.1 arriba). Como se puede observar, esta es una propiedad local: una transformación es conforme sii es conforme en un entorno de cada punto.

Por lo tanto, y en el sentido que acabamos de mencionar, toda función holomorfa con derivada no nula es una transformación conforme del plano.

Esta propiedad tiene aplicaciones importantes y por otra parte permite entender, de alguna manera, el "comportamiento" de las funciones holomorfas. Por ejemplo, una función holomorfa $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ con derivada distinta de 0 en todos los puntos del abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ , tranforma la red cartesiana (más precisamente: la parte de la red cartesiana que está incluida en $D$), en un par de familia de curvas ortogonales (meditarlo). Esta es uno solo de los aspectos que mencionaremos por ahora.

Antes de terminar con algunos ejemplos y ejercicios, no podemos dejar de mencionar que la proyección estereográfica es una transformación conforme de la esfera en el plano, razón por la cual ha sido utilizada en la navegación marítima durante muchos siglos. (Se recomienda buscar información seria sobre la proyección estereográfica).

***Ejercicio* 8.1*:***

(a) Dada una recta $r = \{x + iy \in \mathbb{C} : ax + by = c\}$ donde $a$, $b$ y $c$ son tres constantes reales (donde $a$ y $b$ no son simultáneamente nulos), deducir que

$$r = \{z \in \mathbb{C} : \overline{p}z + p\overline{z} = c\},$$

donde $p = \dfrac{a+ib}{2}$. Probar que, recíprocamente, dados un complejo no nulo $p$ y una constante real cualquiera $c$, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \overline{p}z + p\overline{z} = c\}$ es una recta.

(b) Dada una circunferencia $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, deducir que

$$C = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} - z\overline{z}_0 - \overline{z}z_0 + z_0\overline{z}_0 = r^2\}$$

y que $0 \in C \quad \Leftrightarrow \quad C = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} - z\overline{z}_0 - \overline{z}z_0 = 0\}$. Probar que, recíprocamente, dados un complejo $z_0$ y un número real $r > 0$, el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} - z\overline{z}_0 - \overline{z}z_0 + z_0\overline{z}_0 = r^2\}$ es la circunferencia de centro $z_0$ y radio $r$.

***Ejercicio* 8.2*:*** Estudiar las siguientes funciones (como transformaciones del plano). Cuando le sea posible, estudie cómo transforman las rectas y las circunferencias, utilizando el ejercicio anterior, y cómo transforman la red cartesiana y la red polar. No es un ejercicio para hacer en un ratito. Está destinado a que se entiendan algunos ejemplos importantes, algunos no triviales, de transformaciones especialmente importantes.

(*a*) Las traslaciones, es decir: las funciones $T_p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $T_p(z) = p + z$, donde $p$ es una constante compleja. (Ojo: son muy sencillas pero no son lineales….)

(*b*) Las homotecias, es decir: las funciones $h_\rho : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $h_\rho(z) = \rho z$, donde $\rho$ es una constante real positiva. (Ya fueron estudiadas aquí arriba. Aproveche a repasar). Ya que estamos, las homotecias con centro en un punto $z_0 \neq 0$ son de la forma $T_{z_0} \circ h_\rho \circ T_{-z_0}$, es decir: $z \mapsto z_0 + \rho(z - z_0)$. Si quiere entender visualmente estas transformaciones, elija un punto $z_0 \neq 0$, un número real $\rho > 0$ y dibuje la transformación de un triángulo, por ejemplo.

(*c*) Las rotaciones $R_\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $R_\alpha(z) = e^{i\alpha} z$, donde $\alpha$ es una constante real. (Ya fueron estudiadas aquí arriba. Aproveche a repasar). Lo mismo que en el caso de las homotecias, las rotaciones con centro en un punto $z_0 \neq 0$ son de la forma $T_{z_0} \circ R_\alpha \circ T_{-z_0}$, es decir: $z \mapsto z_0 + R_\alpha(z - z_0)$. Si quiere visualizarlas, elija un punto $z_0 \neq 0$, un número real $\rho > 0$ y dibuje la transformación de un triángulo, por ejemplo.

(*d*) Las funciones $\mathbb{C}$-lineales $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Aproveche a repasar, otra vez.

(*e*) La función exponencial. Conviene que estudie, especialmente, la transformación de la red cartesiana.

(*f*) Las funciones circulares $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $sen : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Aquí conviene detectar primero los puntos donde se anulan las derivadas de estas funciones. La transformación de la red cartesiana que realizan estas funciones no son muy sencillas, pero son importantes para entender sus inversas locales. Si necesita ayuda, avísenos.

(*g*) La inversión multiplicativa $J : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ dada por $J(z) = \dfrac{1}{z}$. La transformación de la red cartesiana puede no resultar muy trivial, pero es bastante divertida. En cambio, la transformación de la red polar es tan sencilla como aburrida. Para la red polar, es conveniente comparar las orientaciones de cada curva y la de su transformada. Lo que sí debe probar cuidadosamente, utilizando el ejercicio anterior, es que *J* transforma rectas en rectas o circunferencias y circunferencias en rectas o circunferencias. Un punto clave es si las rectas o las circunferencias en cuestión pasan o no por el origen. Una propiedad que ahorra muchas cuentas es $J \circ J = Id$, es decir: *J* es biyectiva e igual a su inversa: $J^{-1} = J$.

(*h*) Las homografías: son las funciones racionales de la forma $H_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, donde el subíndice *A* es la matriz no nula $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Se supone que *c* y *d* no son simultáneamente nulos. El dominio de $H_A$ es, obviamente, $\{z \in \mathbb{C} : cz + d \neq 0\}$.

(*h*.1) Compruebe que $H_A(z) = \dfrac{a}{c}\left[1 - \dfrac{\det(A)}{ac}\dfrac{1}{z + \frac{d}{c}}\right]$, si $c \neq 0$. En particular, esto significa que si det(*A*) = 0, $H_A$ es constante. En el caso en que $\det(A) \neq 0$, deduzca que $H_A$ es composición de traslaciones, homotecias, rotaciones y la inversión *J*. Conclusión: las homografías transforman rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.

(*h*.2) (Optativo) Pruebe que $H_{\lambda A} = H_A$ para toda matriz inversible (es el caso interesante) $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y todo escalar complejo $\lambda$ no nulo. Deduzca que para toda matriz inversible

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, existe una matriz $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ de determinante = 1 tal que $H_A = H_S$. Si en algún momento está demasiado aburrido, le sugiero que navegue en búsqueda de información seria sobre el *grupo especial lineal*, uno de los protagonistas de la matemática del siglo XX.

(*h*.3) (Optativo) Pruebe que para todo par de matrices inversibles $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $H_{AB} = H_A \circ H_B$. También compruebe que $H_I = Id$ y deduzca que para cada matriz inversible $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $H_{A^{-1}} = (H_A)^{-1}$ (especificar dominios de $H_A$ y de $H_{A^{-1}}$). Si siente algo de curiosidad (o está aburrido), puede buscar información seria sobre el *Grupo de Moebius*.

Terminamos este apunte con un momento cultural y un comentario final.

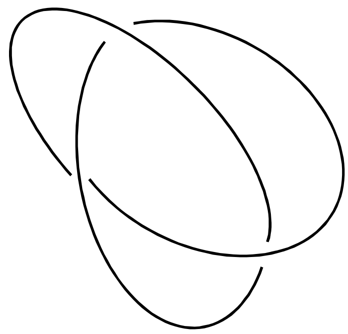
***Momento cultural***: Uno de los teoremas más importantes del siglo XIX (lo que es mucho decir, dada la producción matemática de ese siglo) es el *Teorema de la Representación Conforme* (1851 – Bernhard Riemann), cuyo enunciado ya podemos comprender (y asombrarnos):

« Dado un abierto simplemente conexo *U* del plano complejo, no vacío y distinto del plano complejo, existe una función holomorfa y biyectiva $f : U \longrightarrow D(0;1)$ »

(donde $D(0;1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, en nuestra notación habitual). Existen otros enunciados (más completos) de este teorema, y volveremos a mencionarlo en el Apunte sobre Ecuaciones Diferenciales (página 17). Tengamos presente que si *f* es holomorfa y biyectiva, su derivada no se anula en ningún punto (propiedad que ya hemos mencionado en el capítulo anterior) y por lo tanto su inversa también es holomorfa (se deduce del teorema de inversibilidad local, también mencionado en el capítulo precedente). Estas funciones que son biyectivas y holomorfas y cuya inversa también es holomorfa reciben el nombre de *funciones biholomorfas*. Para tener alguna idea del alcance de este teorema, intente imaginar los abiertos simplemente conexos más extravagantes que se le ocurra. Bien. Cualquiera de ellos se puede transformar en el disco de manera muy "prolija". Para un enunciado más completo y una demostración del mismo, recomiendo fuertemente (una vez más): *Complex Analysis* – E. M. Stein and R. Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis – II, página 224).

***Comentario final***: [Sobre el concepto de orientación, y puede omitirse olímpicamente] No tenemos tiempo ni lugar aquí para tratar este tema como corresponde, pues en los cursos de álgebra lineal previos nunca se mencionó este tema; solamente aparece alguna mención a la orientación en referencia al espacio euclídeo tridimensional, cuando se define el producto vectorial utilizando la mano derecha. Esta curiosa convención antropomórfica suele ser práctica en la vida cotidiana terrestre (hasta cierto punto), pero no es muy seria que digamos…

Desde hace ya un par de siglos, existe una forma precisa y sin referencias al cuerpo humano, para definir *orientación* en cualquier espacio vectorial real de dimensión finita con cualquier producto interno. Limitándonos al caso del plano, cuando mencionamos giros horarios y antihorarios, estamos mencionando las dos orientaciones posibles, sin referencias a dedos ni brazos, pero mencionando implícitamente un artefacto cuya presencia es muy extraña en este contexto: el reloj. Más aún: sería bueno que el reloj en cuestión indique la hora mediante agujas que giran, y no mediante números en un tablerito electrónico…. Aún así, la denominación de giro antihorario es absolutamente convencional y no hay ninguna razón geométrica para elegir un sentido u otro. Mencionarlo como giro "positivo" no ayuda mucho, es solamente un cambio de nombre. Por si todavía no se dio cuenta, párese delante de un compañero (manteniendo la distancia social reglamentaria) y comience a girar su dedo índice describiendo una circunferencia en un plano paralelo a su tórax, por ejemplo. Elija el sentido de giro que prefiera y denomínelo antihorario o positivo. ¿Cómo ve este giro el compañero que tiene enfrente? Lo ve al revés, sí, al revés, lo mismo que usted, si tuviera un reloj transparente y pudiera verlo desde atrás, vería las agujas girando en sentido antihorario…. Pero bueno, todavía se escuchan en algunos pasillos la expresión "curva cerrada simple (en el espacio) recorrida en sentido antihorario". ¿Cómo sería el recorrido antihorario de esta curva cerrada simple en el espacio?



[Fin ***Comentario*** y fin de capítulo]